E.N.S.I. DE CHIMIE groupe Centre 1983

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME PARTIE

DURÉE : 2 heures

Option TB

On rappelle le résultat suivant : l'ensemble des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant la relation de récurrence :

$$(\forall\, n \geqslant 2) \qquad u_n + \lambda u_{n-1} + \mu u_{n-2} = 0 \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$$

est un espace vectoriel de dimension deux sur $\mathbb{C}$. Si $\lambda^2 - 4\mu \neq 0$, il existe deux solutions linéairement indépendantes de la forme $u_n = r^n$.

On définit une suite de fonctions réelles y_n par

$$(1) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}) \begin{cases} y_0(x) = 2 \ ; \qquad y_1(x) = \dfrac{1}{2} - x \\ (\forall n \geqslant 2) \qquad y_n(x) + \left(x - \dfrac{1}{2}\right) y_{n-1}(x) + \dfrac{1}{16}\, y_{n-2}(x) = 0 \end{cases}$$

1° *a*. Calculer $y_2(x)$ et $y_3(x)$ et les racines de $y_2(x) = 0$ et $y_3(x) = 0$.

1° *b*. Montrer que, pour tout n, y_n est une fonction polynôme dont on précisera le degré, le coefficient dominant, et le terme constant.

.../...

2° Montrer $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad y_n(x) = (-1)^n y_n(1-x)$. En déduire une propriété des racines du polynôme y_n. Montrer qu'il existe une racine commune à tous les polynômes y_{2k+1} $(k \in \mathbb{N})$.

3° *a.* En utilisant le résultat du préambule, montrer :

$$(\forall x \in]0, 1[) \qquad y_n(x) = \frac{1}{4^n}\left[(1 - 2x + 2i\sqrt{x - x^2})^n + (1 - 2x - 2i\sqrt{x - x^2})^n\right]$$

3° *b.* En déduire, si $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$: $y_n(\cos^2\theta) = a_n \cos 2n\theta$, et préciser la valeur de a_n.

3° *c.* Conclure que y_n a toutes ses racines réelles et donner leur valeur. Vérifier pour y_2 et y_3.

4° *a.* Montrer que pour $x \in]0, 1[$, on a

$$2\, y_n(x)\, y'_n(x) = y'_{2n}(x) \tag{2}$$

et

$$(x^2 - x)\,(y'_n(x))^2 = n^2 y_{2n}(x) - \frac{2n^2}{4^{2n}} \tag{3}$$

(On pourra utiliser le changement de variable suggéré par 3° *b.*)

4° *b.* Montrer, en utilisant les propriétés des polynômes, que (2) et (3) sont valables pour tout réel x.

4° *c.* En déduire que y_n est solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(E_n) \qquad 2(x^2 - x)\, y''(x) + (2x - 1)\, y'(x) - 2n^2\, y(x) = 0$$

5° Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions numériques indéfiniment dérivables sur [0,1]. Pour $(f, g) \in E^2$, on définit :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 \frac{f(x) \cdot g(x)}{\sqrt{x - x^2}}\, dx \quad \text{et} \quad \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est *défini* sur E^2, et que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire euclidien sur E :

6° A toute $f \in E$, on associe $\varphi(f)$ par :

$$\varphi(f)(x) = 2(x^2 - x) f''(x) + (2x - 1) f'(x)$$

6° *a.* Montrer que φ est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire défini à la question 5.

6° *b.* Que peut-on conclure pour $\langle y_n, y_p \rangle$ si $n \neq p$?

6° *c.* Calculer $\|y_n\|$ (on distinguera le cas $n = 0$).

7° Soit φ_1 la restriction de φ au sous-espace $F = \mathbb{R}_3[X]$ (ensemble des polynômes réels dont le degré n'excède pas trois).

7° *a.* Montrer que $\varphi_1 \in \mathcal{L}(F)$ et donner sa matrice pour la base canonique de F.

7° *b.* Déterminer les valeurs propres de φ_1 et les sous-espaces propres associés (cette question admet une solution très courte en utilisant les polynômes y_n).

8° Intégrer l'équation (E_n) sur $]0, 1[$ en utilisant le changement de variables $x = \cos^2\theta$.

FIN